Sup Maroc
SupMaroc
www.supmaroc.com

Durée : 1 heure 30 minutes

Exercice 1. *(6 points)*

D'une enquête nationale menée auprès de 3000 jeunes nous avons tiré le tableau suivant :

X \ Y	Très favorable à l'égalité entre les sexes	Moyennement favorable à l'égalité entre les sexes	Défavorable à l'égalité entre les sexes
Connait le code de la famille	1500	500	200
Ne connait pas le code de la famille	200	100	100

X désigne la connaissance du code de la famille promulguée en 2004

Y désigne la position quant l'égalité entre les sexes (égalité dans les droits d'accès à l'éducation, à la santé, à l'emploi, à l'autonomie, ... etc)

1) Quelle est la fréquence conjointe de la connaissance du code de la famille et du fait d'être très favorable à l'égalité entre les sexes ? **(1 point)**
2) Donnez une représentation graphique de la distribution des jeunes enquêtés selon la position quant l'égalité entre les sexes. **(1.25 points)**
3) Donnez la distribution des fréquences des jeunes ne connaissant pas le code la famille selon la position quant à l'égalité entre les sexes. **(1.25 points)**
4) La position quant à l'égalité entre les sexes exprime, selon les modalités définies, un degré. Donnez une mesure de l'indépendance ou association entre les deux caractères X et Y (formule). Effectuez l'application numérique. Interprétez. **(2.5 points)**

Exercice 2. *(7 points)*

On admet que la durée de vie, exprimée avec une unité de temps convenablement choisie, d'un certain type de matériel est représentée par une variable aléatoire X suivant la loi de Weibull de paramètre θ, β et λ positifs. Cette loi a pour fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{(x-\lambda)^{\beta}}{\theta}\right) & , \text{si } x > \lambda \\ 0 & \text{si } x \le \lambda \end{cases}$$

On suppose connus les paramètres β et λ de la loi de Weibull, le paramètre θ étant au contraire inconnu. De plus on disposera des durées de vie observées sur n matériels du type considéré, réalisation d'un échantillon de taille n $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

On admettra que la variable $Y = \dfrac{2}{\theta}(X-\lambda)^{\beta}$ suit la loi de Chi-deux à 2 degrés de liberté.

Sup Maroc
SupMaroc
www.supmaroc.com

1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ. (1 point)

2) Quelle est la distribution de la variable aléatoire $\frac{2n\hat{\theta}_{MV}}{\theta}$. (1 point)

3) L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est-il sans biais ? convergent ? efficace ? (3 points)

4) a) Calculer une estimation $\hat{\theta}_{MV}$ de θ pour $\lambda=0$, $\beta=1/2$ et lorsqu'un échantillon de taille $n=15$ donne une réalisation observée telle que $\sum_{i=1}^{15} x_i^{1/2} = 15{,}23$. (0,5 point)

b) Tester au seuil $\alpha = 5\%$ l'hypothèse $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta \neq 1$. (1,5 point)

Exercice 3. *(7 points)*

On admet la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\left(\frac{p^2}{2u} + t\,u\right)\right) du = \frac{\sqrt{2\pi}}{p} \exp\left(-p\sqrt{2t}\right)$$

$$\forall\, p>0\,,\ \forall\, t>0$$

1. Si $p>0$ et $\theta>0$, soit U une variable aléatoire de densité :

$$f_{p,\theta}(u) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}}\, u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\left(\frac{p^2}{2u} + \frac{\theta}{2}u - p\sqrt{\theta}\right)\right) \quad \text{pour} \quad u>0$$

a- Montrer que si $z < \frac{\theta}{2}$ alors : $E\left(e^{zU}\right) = \exp\left(p\left(\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta-2z}\right)\right)$. En déduire $E\left(U\,e^{zU}\right)$ et $E(U)$.

b- Calculer de même $E\left(U^2 e^{zU}\right)$ et $E\left(U^2\right)$. En déduire la variance de U.

2. Soit $q>0$ et V une variable aléatoire indépendante de U de densité $f_{q,\theta}$. A l'aide de la question 1. montrer que la variable aléatoire $U+V$ à une densité $f_{p+q,\theta}$.